モンテカルロ法

❏ 目的

サイコロをふって π と $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ の近似値を求める。

❏ 実験用具

乱数サイ、方眼紙、コンパス

❏ 解説

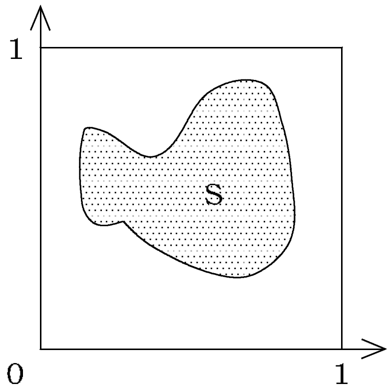

図 1

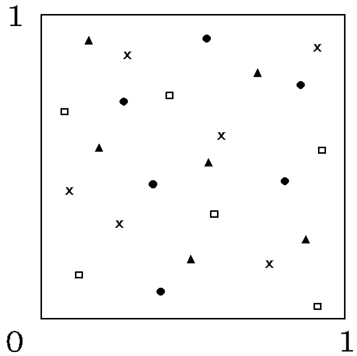

図 2

モンテカルロ法とは、

(1) 厳密には解けない問題の処理
(2) 解答のチェック
(3) 厳密に解ける問題ではあっても、近似値で充分なときの計算時間の節約

などに使われる、確率論を用いた数値解析である。

この方法は、物理学で最近大きく発達してきた計算機物理の一部であり、大規模実験の結果の大型計算機を用いた予測とか、複雑な方程式を解くことなどに使われている。

この実験では、面積の測定にモンテカルロ法を使ってみよう。それには例えば 0 と 1 の間にバラバラに分布している数を利用する。バラバラな数とはなんの規則性もなく分布している数であり、乱数 (random sampling number) という。乱数を作る方法はいろいろあるが、ここでは乱数サイという特別のサイコロを使う。これは正 20 面体で、20 の面に 0 から 9 までの数字が 2 回ずつ書いてあるサイコロである。乱数サイをくり返し投げて出る目の数を記録することによって作られる数列は乱数である。この数列を n 個ずつの数字に切れば n 桁の乱数になる。

今、n が 2 の場合をとり、この 2 桁の数が、小数点以下の 2 桁を表していると考える (0.00 から 0.99 までの乱数とみるのである)。この乱数 2 つを平面上の点の座標 (x, y) の成分 x, y $(0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1)$ に対応させる。図 1 に示すように、一辺の長さが 1 の正方形の中の任意の図形 S を考えて、図 2 のように分布した多数の点 (x, y) がこの図形 S の内と外にどのように分布するかを数える。S の内にある点の数が a 、S の外にある点の数が b だとすると、S の面積 S_a は正方形の面積 1 に対して、近似的に次の式で表すことができる。

$$\frac{S_a}{\text{正方形の面積}} = \frac{S_a}{1} = S_a \fallingdotseq \frac{a}{a+b} \tag{1}$$

≪注≫　この式の記号 $\fallingdotseq$ は近似的に等しいということを表している。

❏ 実験方法

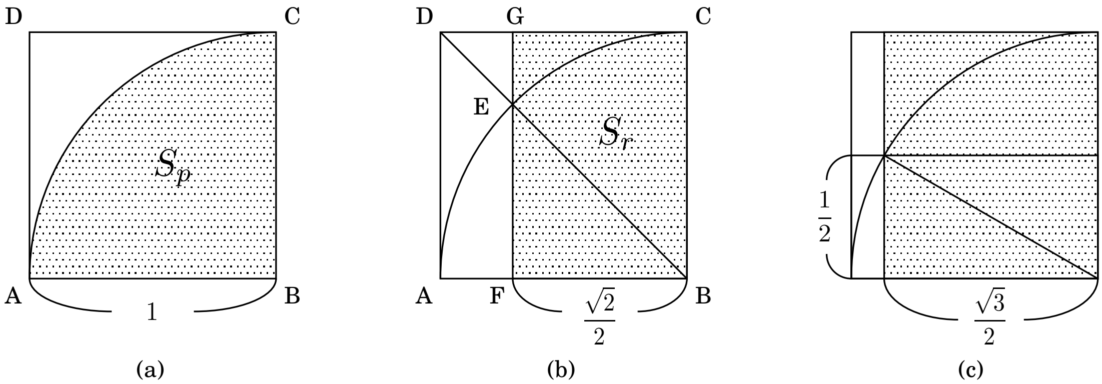

図 3

(1) 色の異なる乱数サイを 2 個用意し、たとえば赤は小数第 1 位、青は小数第 2 位と最初に約束しておく。これは実験者が途中で勝手に順序を変えてしまわないようにするためである。
(2) 次ページの実験例のように、サイを投げて目の数をレポート用紙の表のそれぞれの枠の中に 2 回分ずつ記録する。例えば $(25, 83)$ は、解説で述べたように x-y 面上の一点 $(0.25, 0.83)$ に対応することになる。乱数サイを投げるとき、ただ単に前方に投げるのでなく、投げたサイが壁や本等にあたって跳返るようにすると目の数がバラバラになる。
(3) 乱数サイを 200 回投げて記録し x-y 面上の点 100 個を求める。
(4) 方眼紙に一辺の長さが 1(10cm) の正方形を描き、この 100 個の点を図 2 のように色とか形で 25 個ずつ区別しながら記入する。

(5) ここで得た点の分布を使って円周率 π と $\sqrt{2}$ の近似値を求める。それには正方形の中に、任意の頂点 (例では B) を中心として半径 1(10cm) の弧を描く。弧と対角線 BD の交点 E から AB、CD に下した垂線の足を、それぞれ F、G とすると、扇形 ABC (図 3(a)) と 長方形 BCGF (図 3(b)) を得る。

(6) 扇形 ABC の内と外の点の数をそれぞれ p、q、面積を S_p、長方形 BCGF の内と外の点の数をそれぞれ r、s 面積を S_r とすると S_p、S_r の近似値は (1) 式 に示したように

$$S_p \fallingdotseq \frac{p}{p+q} \quad S_r \fallingdotseq \frac{r}{r+s}$$

となる。この方法により π と $\sqrt{2}$ の近似値を次の順序で求めてみよう。

(a) 最初から 25 個ずつの点の 4 組について π と $\sqrt{2}$ の近似値を求める。

(b) 最初から 50 個ずつの点の 2 組について π と $\sqrt{2}$ の近似値を求める。

(c) 100 個の点について π と $\sqrt{2}$ の近似値を求める。

(7) 同様に、この実験で得た点の分布を使って $\sqrt{3}$ の近似値を求める。(図 3(c) の長方形の内と外の点の数をそれぞれ r'、s' とする。)

❏ 実験例

乱数サイの目の数の記入例 (一部分)

(N は点の番号を示す。M の欄に投げたサイの目の数を 2 回分ずつ記入する。)

小数第 1 位 (赤) 色、小数第 2 位 (青) 色

N	M	N	M	N	M	N	M	N
1	25	11	71	21	92	31	57	41
	83		88		36		26	
2	87	12	21	22	13	32	79	42
	06		05		65		63	
3	47	13	12	23	74	33	72	43
	51		94		38		43	
4	90	14	56	24	17	34	99	44
	44		73		29		35	
5	39	15	61	25	33	35	48	45
	13		97		41		77	
6	82	16	54	26	61	36	30	46

普通のサイコロを使って乱数を作る方法

実験で使ったサイコロは正 20 面体であって、どこにでもあるものではない。普通の正 6 面体のサイコロを使って乱数を作るにはどうしたらよいだろうか。

普通のサイコロを多数回振って目の数を記録すると 1 から 6 までの乱数が得られる。この 6 を 0 におきかえると、0 から 5 までの数の乱数になる。ここでたとえば 3 桁ずつに区切ると、得られた数は 6 進法の 0 から 555 までの乱数だということになる。

10 進法の数が 1 の位、10 の位、10^2 の位、となっているように、6 進法の数は 1、6、6^2 の位の数字が並んでいる。従ってたとえば 6 進法の 451 は、10 進法になおすと

$$451\ (6\text{ 進法}) = 4 \times 6^2 + 5 \times 6 + 1 = 175\ (10\text{ 進法})$$

になる。

同様にして、6 進法の 0 から 555 までの数は、10 進法では 0 から 215 までの数になる。そこでサイコロを振った目の数の数列を 3 個ずつに区切ったものは、0 から 215 までの 216 個の数がバラバラに並んでいる乱数である。

この乱数を使って π、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ を求めるには、これらの乱数を 216 で割った数を点の座標の値とすれば、正 20 面体でおこなった実験が、普通のサイコロでできることになる。