テープの面積

❑ 目的

遊動顕微鏡を使ってテープ（非常に細長い長方形）の幅を測定し、巻尺で長さを測り、テープの面積を求める。次に遊動顕微鏡と巻尺の精度を比較しながら、誤差を計算し、誤差を含めた面積の範囲を求める。

❑ 実験用具

遊動顕微鏡、テープ、押さえガラス、巻尺

❑ 解説

(1) 遊動顕微鏡について

遊動顕微鏡は、顕微鏡を移動させながら物を観測することにより、その物の位置や、左右、上下の長さを精密に測定するものである。目盛は左右、上下ともに、主尺と副尺があり、これを使って高い精度の測定をする。

遊動顕微鏡の詳しい使い方は付録にあるので、よく読んで使い方に慣れること。

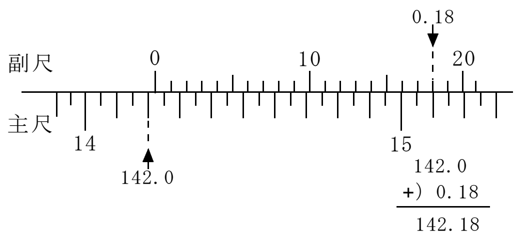

図 1

図 1 の例では副尺の目盛のうち主尺の目盛と正確に重なっているのは、副尺の 18 だけである。このとき副尺の目盛 0 は、主尺の 142.0mm から右に 0.18mm ずれていて 142.18mm と読める。

問 1　主尺と副尺の目盛が中途の 2 カ所以上でそろうことはない。なぜか。

(2) 測定精度について

いくつかの測定量から、計算によってある値を求めるとき、それぞれの測定精度が、結果に与える影響は一様ではない。非常に細長い長方形の、縦、横それぞれの辺に同じ大きさの誤差があるときの、面積の誤差への影響を考えてみよう。

表 1 は、縦 1m、横 1cm の、非常に細長い長方形の、縦、横 それぞれに同じ ±0.1mm の差があるときの、長方形の面積を表している。1m の辺が 0.1mm 変化すると、

たて＼よこ	9.9 [mm]	10.0 [mm]	10.1 [mm]
999.9 [mm]	9899.0	9999.0	10099.0
1000.0 [mm]	9900.0	10000.0	10100.0
1000.1 [mm]	9901.0	10001.0	10101.0

面積の単位は [mm^2]

表 1

面積に $\pm 1\mathrm{mm}^2$ の差しか生じないのに、1cm の辺が 0.1mm 変化すると、面積に $\pm 100\mathrm{mm}^2$ の差を生じている。短い辺の測定には、長い辺の測定よりも高い測定精度が必要なのである。

(3) 面積と誤差の計算

長さ L と幅 B の平均値から面積 S を計算する。L と B にはそれぞれ誤差がある。この誤差が面積に及ぼす影響を考えよう。

同じ測定を何回か繰り返すと、測定値に不揃いを生じることがある。これを考慮して、この実験では、平均値との差の最大値 (絶対値) をそれぞれの誤差とする。

しかし誤差はこれだけではない。これまでは尺度が正しいということを前提としてきたが、尺度自身にも誤差があると考えなければならない。普通の尺度は、JIS (Japanese Industrial Standards) によってその誤差が規制されている。

ここで用いる巻尺は全長 2m であって、これで 1m 以上のものを測る場合には 1.5mm までの誤差が認められている。このように、法律で規制された尺度の誤差を公差という。遊動顕微鏡の目盛にも誤差があるが非常に小さいので、この実験では無視する。

以上のことから、この実験では、長さ L については、測定値と平均値との差の最大値 $|\Delta L'|$ と、巻尺の公差 1.5mm とを比較して、大きい方の値を L の誤差 $|\Delta L|$ とし、幅 B については、平均値との差の最大値を B の誤差 $|\Delta B|$ として、面積 S の誤差 ΔS を計算すると次のようになる。

$$S + \Delta S = (L + \Delta L) \times (B + \Delta B) = L \cdot B + B\Delta L + L\Delta B + \Delta L \cdot \Delta B$$

右辺第 1 項の $L \cdot B$ は S であり、また第 4 項の ΔL、ΔB はそれぞれ L、B にくらべて十分小さいのでその積 $\Delta L \cdot \Delta B$ は他の項に比べて非常に小さい数になり無視してよい。これらの項を消去すると、上式は

$$\Delta S \fallingdotseq B\Delta L + L\Delta B = \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta B}{B}\right) S$$

となり、絶対値を使って書くと

$$|\Delta S| = \left|\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta B}{B}\right| S$$

ΔS、ΔL、ΔB は正のことも負のこともあるので、不等式

$$|\Delta S| \leqq \left(\frac{|\Delta L|}{L} + \frac{|\Delta B|}{B}\right) S$$

が成立する。この式は S の誤差 ΔS の大きさが右辺をこえないという意味だから、最大値をとり、これを面積の誤差 ΔS とした次の式で表すことができる。

$$\Delta S = \left(\frac{|\Delta L|}{L} + \frac{|\Delta B|}{B}\right) S$$

したがって、正しい面積 S_{o} の存在する範囲は $S - \Delta S < S_{\mathrm{o}} < S + \Delta S$ であり、求める面積は次の式で表される。

$$S_{\mathrm{o}} = S \pm \Delta S$$

≪注≫　$\Delta L/L$ および $\Delta B/B$ を、それぞれ長さおよび幅の相対誤差といい、この値が、大体同じ大きさになるようにすることが望ましい。

問 2　幅は遊動顕微鏡で測ったのに、長さは巻尺で測ればよかった理由を、$\Delta L/L$ と $\Delta B/B$ の大きさを比較して考えてみよう。

❑ 実験方法

(1) 巻尺でテープの長さ L を測定する。テープの左右の端に沿って長さを 2 回ずつ測りその平均値を $\bar{L}$ とする。

(2) テープの幅 B を測定する。

  (a) テープをおよそ 11 等分する位置に、鉛筆で細くきれいに、テープに直角に、10 本の線を引く。

  (b) 遊動顕微鏡のネジ L を回して、支柱の取り付け台についている水準器の気泡が器の中央にくるようにする。これによって遊動顕微鏡の台は水平になる。

  (c) 顕微鏡 M を垂直にし、接眼レンズを調整して十字線が視野に明瞭に見えるようにする。

  (d) テープを尺度 S に直角になるように水平な台 P の上にのせ、押えガラスで固定する。

  (e) 顕微鏡の筒を、ネジ H′ で下げ、次に顕微鏡をのぞきながら、テープに引いた鉛筆の線が明瞭に見えるようになるまで顕微鏡を上げてゆく。次に、H を回した

とき、十字線の交点が鉛筆の線に沿って動くように、テープの位置と向きを調節する。

(f) 十字線の交点を、鉛筆の線の一方の端に合わせ、解説の (1) で示したように主尺 S と副尺 V を使って、この顕微鏡の位置 X_1 を 1/100mm まで正確に読み取る。次に十字線の交点を、鉛筆の線に沿って移動させ、反対の端の位置 X_2 を読む。この時テープの位置がずれないように注意する。X_1 と X_2 の差からテープの幅 B が求められる。

これを 10 個所についておのおの 1 回ずつ測定し平均値を $\bar{B}$ とする。

(3) 上の (1) と (2) で求めた $\bar{L}$ と $\bar{B}$ から面積 S を計算する。

(4) L と B のそれぞれの誤差から S の誤差を計算し、正しい面積が存在する範囲を求める。

≪注意≫ 顕微鏡の筒を上下に移動させる場合、レンズを破損する怖れがあるので、顕微鏡をのぞきながら下げてはいけない。必ず十分に下げた位置から上げる状態で、顕微鏡をのぞくようにすること。

❑ 実験例

(1) 長さ L の測定

左端	1204 [mm] 1205
右端	1205 1206

表より 左端、右端 の長さの 2 回ずつの平均値を求めると、

$$\text{平均値 } \bar{L} = \frac{1204 + 1205 + 1205 + 1206}{4} = 1205 \text{ [mm]}$$

求めた平均値と測定値の誤差の最大値は $\Delta L' = 1.0$ [mm] となり、公差の 1.5mm の方が大きいので、長さの誤差としては $|\Delta L| = 1.5$ [mm] を用いる。

(2) 幅 B の測定

単位は [mm]

回	X_1 の読み	X_2 の読み	$B = \lvert X_1 - X_2 \rvert$	平均との差
1	119.53	109.27	10.26	+0.03
2	126.65	116.44	10.21	−0.02
3	38.59	28.34	10.25	+0.02
4	58.47	48.28	10.19	−0.04
5	80.81	70.57	10.24	+0.01
6	130.18	119.95	10.23	0.00
7	162.53	152.31	10.22	−0.01
8	183.18	172.95	10.23	0.00
9	194.67	184.42	10.25	+0.02
10	188.69	178.44	10.25	+0.02
		平均	10.23	

(3) 面積の計算

$$S = 1205 \times 10.23 = 12327 \ [\mathrm{mm}^2]$$

(4) 面積の誤差の計算

$$|\Delta L| = 1.5 \ [\mathrm{mm}]$$

$$|\Delta B| = 0.04 \ [\mathrm{mm}]$$

$$\Delta S = \left(\frac{1.5}{1205} + \frac{0.04}{10.23}\right) \times 12327 \fallingdotseq \left(\frac{1.5}{1200} + \frac{0.04}{10}\right) \times 12000 = 15 + 48 = 63 \ [\mathrm{mm}^2]$$

誤差の大きさをみると 12327 の 5 桁目すなわち 1 の位の数字は意味をもたない。このとき、有効数字は 4 桁であるという。したがって、正しい面積 S_o の存在する範囲は、

$$(1233 - 6) \times 10 < S_\mathrm{o} < (1233 + 6) \times 10 \ [\mathrm{mm}^2]$$

ということができる。これを、

$$S_\mathrm{o} = (1233 \pm 6) \times 10 \ [\mathrm{mm}^2]$$

または、

$$S_\mathrm{o} = (1.233 \pm 0.006) \times 10^4 \ [\mathrm{mm}^2]$$

と表す。どちらの書き方もカッコの中には有効数字だけが書かれている。上の場合は整数を使い、下の場合は 1 以上、10 未満の数字を使っている。